Шифр:

С – 11

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Сиверская гимназия"

Класс 11

ФИО Ушков Даниил Анатольевич

Шифр:

С-11

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа МБОУ „Сиверская гимназия"

Класс 11

ФИО Ушков Даниил
Анатольевич

1	2	3	4	5	Σ
7	7	x	7	x	21

№ 11.1

1. Человек, который сказал „Моё число меньше 1" – лжец, ~~так как~~. Допустим, что он – рыцарь, тогда высказывание „Мое число меньше 1" противоречит любому из высказываний: „Моё число больше 1", „Моё число больше 2", ..., „Мое число больше 10". ~~Следовательно, этот человек – лжец. Противоречие~~.

2. Человек, который сказал „Моё число меньше 2" – также лжец. Аналогично, допустим, что он – рыцарь, ~~но тогда~~. Его высказывание равносильно высказыванию „Мое число меньше или равно 1", так как заданные числа – целые. Но это высказывание противоречит любому из высказываний: „Моё число больше 1", ..., „Мое число больше 10".

3. Следовательно, есть хотя бы 2 лжеца и рыцарей не более 8.

4. Пример, когда рыцарей 8:

1 высказывание:	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
Число:	2	3	4	5	6	7	8	9	5	5
2 высказывание:	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1	<2
Лжец / Рыцарь:	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л

Ответ: 8 рыцарей.

№11.2

1. Если x^2+ax+b имеет целые корни, его дискриминант $d_1=a^2-4b$ – полный квадрат. Аналогично и с $x^2+ax+b+1$, $d_2=a^2-4b-4$ – – полный квадрат.

2. ~~Для d_2 должно выполнятся:~~
~~$(d_2+1)^2-d_2^2$~~ ≤ 4 ~~(ближайший больший~~ квадрат
Пусть $d_2=x^2$, $x\in \mathbb{N}\cup\{0\}$
Для x должно выполнятся:
$(x+1)^2-x^2\le 4$ (ближайший больший квадрат к d_2 должен быть больше не более чем на 4, т.к. $d_1-d_2=4$).
$\Rightarrow 2x+1\le 4$; $x\le 1{,}5$, $d_2=1$ или 0.
1 быть не может, т.к. $d_1=d_2+4=5$ – – не полный квадрат. $\Rightarrow d_2=0$, $d_1=4$

3. Дискриминант $x^2+ax+b+2$: $d_3=a^2-4b-8=$ $=d_1-8=-4$ $\Rightarrow$ уравнение корней не имеет. Доказано

№ 11. 4

1. Сделаем замену $y = x^2$, тогда:

$P_n(y) = y^n + a_1 \cdot y^{n-1} + \ldots + a_n$

2. a_{n+1} — наим. корень $P_n(x)$, а любой корень $\overbrace{P_n(x)}^{x_0 \text{ многочлена}}$ $x_0 = \pm\sqrt{y_0}$, y_0 - корень $P_n(y)$.

Следовательно $a_{n+1} = -\sqrt{y_{max_{n+1}}}$ ($y_{max_{n+1}}$ - макс. корень $P_n(y)$; если $y_{max_{n+1}} < 0$ не имеет смысла говорить о a_{n+1}.)

3. Из п. 2 $a_{n+1} < 0$, ~~n+1~~ $n \geq 2018$

($a_1, a_2, \ldots$ - ненулевые числа)

4. $P_{n+1}(y) = y^{n+1} + y^n \cdot a_1 + \ldots + a_{n+1} = P_n(y) \cdot y + a_{n+1}$

$P_{n+1}(y_{max_{n+1}}) = a_{n+1} < 0$, но $P_{n+1}(x) > 0$ при больших x (*) => Существует y, такой, что $P_{n+1}(y) = 0$ и $y > y_{max_{n+1}}$ => $y_{max_{n+2}} > y_{max_{n+1}}$ =>

$=> -\sqrt{y_{max_{n+2}}} < -\sqrt{y_{max_{n+1}}} <=> a_{n+2} < a_{n+1}$

т.е. начиная с a_{2019} каждый член меньше предыдущего.

Доказано.

(*) Коэффициент $P_{n+1}(y)$ при y^{n+1} больше 0.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	2	x	23

№ 11.6

1. Пусть эти числа $x, x+1, x+2, x+3$, ~~$x>100$~~, $x \in \mathbb{N}$, $x>100$.
2. Рассмотрим случай $x \vdots 2$. Сложим первые 3 числа: $x+(x+1)+(x+2)=3x+3=3\cdot(x+1)$. $x+1 \vdots 2$ и $x+1>100 \Rightarrow \frac{x+1}{2} \in \mathbb{N}$ и $\frac{x+1}{2}>50$ – не единица, не двойки и не тройка. Следовательно, $x+(x+1)+(x+2)=3\cdot 2\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)$.
3. Рассмотрим случай $x \vdots 2$. Сложим три последних числа: $(x+1)+(x+2)+(x+3)=3x+6=3(x+2)$. $x+2 \vdots 2$ и $x+2>100 \Rightarrow \frac{x+2}{2} \in \mathbb{N}$ и $\frac{x+2}{2}>50$ – не 1, не 2, не 3. Следовательно, $(x+1)+(x+2)+(x+3)=3\cdot 2\cdot\left(\frac{x+2}{2}\right)$.

Доказано.

№ 11.7

1. Для решения задачи необходимо доказать $x_n > x_{n+1}$.

2. $x_n > x_{n+1} \iff 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right) > 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right) \iff$ $\boxed{C-11}$

$\iff \sqrt[2^n]{a}-1 > 2\sqrt[2^{n+1}]{a}-2 \iff \sqrt[2^n]{a}-2\sqrt[2^{n+1}]{a}+1>0$

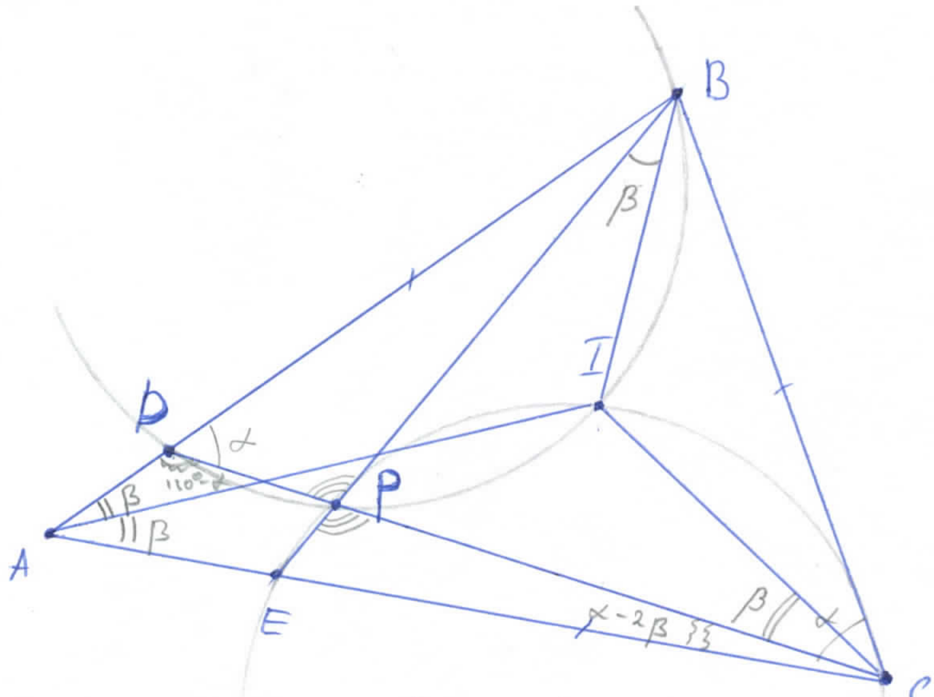
Пусть $x=\sqrt[2^{n+1}]{a}$, $x^2=\sqrt[2^n]{a}$, тогда

$\sqrt[2^n]{a}-2\sqrt[2^{n+1}]{a}+1>0 \iff x^2-2x+1>0 \iff (x-1)^2>0$

$\iff x\neq 1 \iff \sqrt[2^{n+1}]{a}\neq 1 \iff \begin{cases} a\geq 0 \\ a\neq 1\end{cases} \Leftarrow$ (условие)

Доказано.

№ 11.8



1. Пусть I - точка пересечения данных окружностей (не P)
2. Проведем отрезки AI, BI, CI.
3. Пусть $\angle DCB=\alpha$, $\angle ICD=\beta$.
4. $\angle BDC=\alpha$ ($\triangle DBC$ - равнобед. тр).
5. $\angle ADC=180°-\alpha$ (смежные углы)
6. $DB=EC$, $\angle DPB=\angle EPC \Rightarrow R_{\triangle DPB}=R_{\triangle EPC}$ (радиусы опис. окр. равные)
7. п. 6 $\Rightarrow$ дуги PI одинаковы для обеих окружностей $\Rightarrow \angle PBI=\angle PCI=\beta$.
8. точка I – точка Микеля для четырехсторонника $ADBPCE$ (I - точка пересеч. опис. окр. $\triangle DPB$ и $\triangle EPC$)
9. Точки B, I, E, A лежат на одной окр

2

(I – точка Микеля) $\Rightarrow$ ~~$\angle BAI = \angle PBI$~~ C-11

$\angle IBE = \angle IAE = \beta$.

10. Аналогично, точки A, D, I, C лежат на одной окружности $\Rightarrow \angle DCI = \angle DAI = \beta$.

11. $\angle DCA = 180^\circ - 2\beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 2\beta$

12. Заметим, что I лежит на биссектрисе из верш. A. ($\angle BAI = \angle IAC = \beta$) и на биссектрисе из верш. C ($\angle BCI = \angle ICA = \alpha - \beta$). $\Rightarrow$ I – центр. впис. окр. $\triangle ABC$.

Доказано.

№11.9

1. Пусть у каждого ученика есть мн-во чисел – дней, когда он ходил в бассейн. По условию все эти мн-ва имеют разную мощность и для любых двух мн-в A и B:

(*) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$ (В A есть число, которого нет в B, а в B ~~не~~ есть число, которого нет в A)

2. Докажем, что $m \leq 29$. Допустим, что $m = 30$ ($m > 30$ быть не может, так как мощности мн-в различные нат. числа от 1 до 30). Тогда у одного из учеников мощность мн-ва равна 30, и следовательно любое мн-во меньшей мощности является подмножеством этого мн-ва (в мн-вах разл. числа), чего быть не может.

~~3. Пример на 29~~:

C-11

3. Докажем, что $m \leq 28$.

Если нет человека, который сходил всего 1 раз в бассейн, оценка (есть такой человек) доказана. Иначе, все остальные люди не ходили в бассейн вместе с нам в один день. Допустим, что $m = 29$. Тогда 28 человек имеют мн-ва (без дня, в который пошел 1-ый человек) мощность которых от 2 ... 29, $\exists$ есть человек с мн-вом, мощность которого 29 и оно содержит в себе все мн-ва меньшей мощности, что быть не может. Оценка доказана.